◆　研　究　ノ　ー　ト

ペロン・フロベニウスの定理について

On the Perron-Frobenius theorem

理学部 数理科学科

吉冨和志

線形代数学は殆どの理系の大学において初年度の科目として講義されている．線形代数学の最も重要な結果の１つとして，ペロン・フロベニウスの定理が挙げられる．この定理の応用範囲は広く，普通の数学のみならず経済学やフットボールチームのランキング付け（参考文献 1）などで活用されている．数学が現実の問題に活用されているこの種の例を提示することは中等教育において重要であると思われる．本研究ノートでは，この定理の持つ教育効果にスポットを当てる．議論の為に，定理の主張と証明を参考文献 2 から引用する．

成分が全て正の実数である行列を**正行列**，成分が全て非負の実数である行列を非負行列という．ベクトル $x = (x_1, x_2, \dots, x_l)$ の ∞-ノルムを $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_l|)$ で定める．l 次正方行列 $A = (a_{ij})$ に対し，その 1-ノルムを $\|A\|_1 = \sum_{1\le i,j\le l} |a_{ij}|$ で定める．

Theorem 1 (Perron-Frobenius) 正の正方行列 A に対して次のことが成り立つ．

1) A は正の固有値をもつ．そのうち最大のものを α で表すと，α は単純特性根である．α に対する正の固有ベクトル u が存在する．（α を A の **Frobenius 根**という．）

2) A の正の固有ベクトルは全て u の定数倍である．

3) α 以外の A の固有値の絶対値は α より小さい．

4) 転置行列 ${}^tA$ の Frobenius 根は A の Frobenius 根に等しい．

Proof. i) $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le l}$, $\epsilon = \min_{1\le i,j\le l} a_{ij}$ (> 0) とする．任意の非負ベクトル $x = (x_i)$ に対し $Ax = (y_i)$ とすれば

$$y_i = \sum_{j=1}^{l} a_{ij}x_j \ge \epsilon \sum_{j=1}^{l} x_j \ge \epsilon\|x\|_\infty \ge \epsilon x_i. \tag{1}$$

ii) x が正ならば，$Ax = (y_i)$ も正である．

$$\alpha(x) = \min_{1\le i\le l} \frac{y_i}{x_i}, \qquad \beta(x) = \max_{1\le i\le l} \frac{y_i}{x_i}$$

とおくと

$$0 < \epsilon \le \alpha(x) \le \beta(x).$$

$x' = \frac{1}{\|Ax\|_\infty} Ax$ も正であるから，上のような $\alpha(x'), \beta(x')$ を決める．$\|x\|_\infty = 1$ のとき

$$\alpha(x) \le \alpha(x') \le \beta(x') \le \beta(x), \tag{2}$$

$$\alpha(x') \geq \alpha(x) + \frac{\epsilon}{\|A\|_1}\|Ax - \alpha(x)x\|_\infty \geq \alpha(x) \tag{3}$$

が成り立つことを示す．$\beta(x)x - Ax$ は非負ベクトルだから $\frac{1}{\|Ax\|_\infty}A$ を左から掛けることにより $\beta(x)x' - Ax'$ も非負である．すなわち $\beta(x') \leq \beta(x)$.

$x' = (x_i')$, $Ax' = (y_i')$ とする．$Ax - \alpha(x)x$ は非負ベクトルだから，$\frac{1}{\|Ax\|_\infty}A$ を左から掛けることにより $Ax' - \alpha(x)x'$ も非負であり，

$$y_i' - \alpha(x)x_i' \geq \frac{\epsilon}{\|Ax\|_\infty}\|Ax - \alpha(x)x\|_\infty,$$

$$\frac{y_i'}{x_i'} - \alpha(x) \geq \frac{1}{x_i'}\frac{\epsilon}{\|Ax\|_\infty}\|Ax - \alpha(x)x\|_\infty.$$

ここで，$\|x\|_\infty = 1$ より

$$\|Ax\|_\infty = \max_{1\leq i\leq l}\left|\sum_{j=1}^{l} a_{ij}x_j\right| \leq \max_{1\leq i\leq l}\sum_{j=1}^{l}|a_{ij}| \leq \|A\|_1.$$

さらに，$x_i' \leq 1$ だから

$$\frac{y_i'}{x_i'} - \alpha(x) \geq \frac{\epsilon}{\|A\|_1}\|Ax - \alpha(x)x\|_\infty,$$

$$\alpha(x') - \alpha(x) \geq \frac{\epsilon}{\|A\|_1}\|Ax - \alpha(x)x\|_\infty.$$

iii) $\|x_0\|_\infty = 1$ なる任意の正ベクトル x_0 から出発し，帰納的に

$$x_p = \frac{1}{\|Ax_{p-1}\|_\infty}Ax_{p-1} \qquad (p \geq 2)$$

と定義することにより，正ベクトルの無限列 $\{x_p\}_{p=0}^\infty$, $\|x_p\|_\infty = 1$, が得られる．

$$\alpha_p = \alpha(x_p), \qquad \beta_p = \beta(x_p)$$

とおく．ii) より

$$0 < \alpha_0 \leq \alpha_1 \leq \cdots \leq \beta_1 \leq \beta_0,$$

$$\alpha_{p+1} \geq \alpha_p + \frac{\epsilon}{\|A\|_1}\|Ax_p - \alpha_p x_p\|_\infty.$$

したがって，$\lim_{p\to\infty}\alpha_p = \alpha > 0$ が存在し，

$$\lim_{p\to\infty}\|Ax_p - \alpha_p x_p\|_\infty = 0$$

が成り立つ．$\|x\|_\infty = 1$ であるようなベクトルの全体は $\mathbf{R}^l$ の有界閉集合だから，$\{x_p\}$ のある部分列 $\{x_{p'}\}$ が収束する．

$$u = \lim_{p'\to\infty} x_{p'}$$

とおくと u は非負で，$\|u\|_\infty = 1$. よって Au の各成分は正である．

$$Au = \alpha u$$

より u は正である．すなわち α は A の正の固有値であり，u は α に対する正の固有ベクトルである．

iv) ${}^tA$ も正行列だから，正の固有値 γ および γ に対する正の固有ベクトル v が存在する．

$$\alpha(v,u) = {}^tv\alpha u = {}^tvAu = {}^t({}^tAv)u = \gamma{}^tvu = \gamma(v,u).$$

$(v,u) > 0$ より $\alpha = \gamma$.

v) x が A の正の固有ベクトルであるとする．$Ax = \lambda x$ とすれば

$$\lambda(v,x) = {}^tv\lambda x = {}^tvAx = \gamma{}^tvx = \alpha(v,x).$$

$(v,x) > 0$ より $\lambda = \alpha$, すなわち x は α に対する固有ベクトルである．

したがって，任意の正数 c に対し $x - cu$ は α に対する固有ベクトルである．$x - cu$ が非負である最大の c をとる（すなわち，$x = (x_i), u = (u_i)$ と書くと $c = \min_{1 \le i \le l} x_i/u_i$）．$x - cu$ の少なくとも 1 つの成分は 0 だから，$\alpha(x - cu)$ は非負であるが正ではない．このことと，$A(x - cu) = \alpha(x - cu)$ と背理法により $x - cu = 0$ を得る．

特に，α に対する固有空間の次元が 1 であることが判る．実際，A の固有値 α に対する任意の固有ベクトル z に対し，$\mu > 0$ を十分大きくとれば $z + \mu u$ は A の（固有値 α に対する）正の固有ベクトルとなり，上で示したことから $z + \mu u$ は u の定数倍となり，z も u の定数倍となる．α が単純特性根であることを背理法で示す．結論を否定すると，A の Jordan 標準形における，固有値 α に対する Jordan 細胞はただ 1 つであり，その次数は 2 以上だから，$Ay = \alpha y + u$ なる y が存在する．両辺に ${}^tv$ を掛けて $\alpha{}^tvy = \alpha{}^tvy + {}^tvu, {}^tvu = 0$ （矛盾）．よって，α は単純特性根である．

vi) λ を α 以外の A の固有値とする．$x = (x_i)$ を λ に対する固有ベクトルとする．

$$\sum_{j=1}^{l} a_{ij}x_j = \lambda x_i$$

より

$$|\lambda||x_i| \le \sum_{j=1}^{l} a_{ij}|x_j| \quad (i = 1,\ldots,l). \tag{4}$$

$v = (v_i)$ とし，両辺に v_i (> 0) を掛けて加えると

$$|\lambda|\sum_{i=1}^{l}|x_i|v_i \le \sum_{i,j=1}^{l} a_{ij}v_i|x_j| = \sum_{j=1}^{l}\alpha v_j|x_j|.$$

よって $|\lambda| \le \alpha$ が成り立つ．$|\lambda| < \alpha$ であることを背理法で示す．$|\lambda| = \alpha$ を仮定する．全ての i に対し (4) で等号が成立する:

$$\sum_{j=1}^{l} a_{ij}|x_j| = |\lambda x_i| = \left|\sum_{j=1}^{l} a_{ij}x_j\right|.$$

よって $x_i \ne 0\,(i = 1,\ldots,l)$ であり，$x_1,\ldots,x_n$ は共通の偏角 θ を持つ．$e^{-i\theta}x$ は λ に対する正の固有ベクトルだから，v) より $\lambda = \alpha$（矛盾）．(Q.E.D.)

この証明は定理の論証を与えているだけでなく，Frobenius 根の数値計算の次のアルゴリズムも同時に与えている：A を正行列とする．$\|\cdot\|$ をベクトルの通常ノルムとする．

(i) $\|x_0\| = 1$ なる正ベクトル x_0 を固定する．

(ii) 漸化式

$$x_n = \frac{Ax_{n-1}}{\|Ax_{n-1}\|} \qquad n = 1, 2, \ldots$$

によってベクトル列 $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ を定めると，(x_n の第 1 成分)/(x_{n-1} の第 1 成分), $n = 1, 2, \ldots,$ は A の Frobenius 根の近似列となる．

従って，このアルゴリズムを計算機のプログラムとして実装し動作させれば，ペロン・フロベニウスの定理の証明を学生に視覚的なイメージとして理解させることができると思われる．以下はこのアルゴリズムの FORTRAN90 による実装例である．

```
REAL, DIMENSION(:,:), ALLOCATABLE :: A
REAL, DIMENSION(:), ALLOCATABLE :: B
REAL, DIMENSION(:), ALLOCATABLE :: C
REAL :: D, E, F
INTEGER :: I, J, M, K, N
PRINT *, "INPUT MATRIX SIZE"
READ *, N
! 配列割付
ALLOCATE(A(N,N))
ALLOCATE(B(N))
ALLOCATE(C(N))
PRINT *, "INPUT COMPONENTS"
DO I=1, N
    DO J=1, N
        READ *, A(I,J)
    END DO
END DO
PRINT *, "INPUT ITERATION TIMES"
READ *,M
! 初期ベクトル設定
F = N**(-0.5)
DO I=1, N
    B(I) = F
END DO
! 反復計算
DO I=1, M
    C = MATMUL(A,B)
    PRINT *, C(1)/B(1)
    D = DOT_PRODUCT(C,C)
    C = D**(-0.5)*C
    B = C
```

```
END DO
!
PAUSE
STOP
END
```

このプログラムの動作例を 1 つ見てみよう．正行列

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

の固有多項式は $(t-4)(t+1)$ だから，A の Frobenius 根は 4 である．このプログラムにより，計算機に A の Frobenius 根の近似列の最初の 20 項を計算させてみる．計算結果は次のようになる．

```
5.0000000
3.7999997
4.0526319
3.9870129
4.0032573
3.9991860
4.0002036
3.9999492
4.0000124
3.9999969
4.0000010
3.9999998
4.0000000
4.0000000
4.0000000
4.0000000
4.0000000
4.0000000
4.0000000
4.0000000
```

この例において近似列が Frobenius 根 4 に急速に収束することが見て取れると思う．

本研究ノートでは，ペロン・フロベニウスの定理の証明を視覚的イメージとして理解させる 1 つの方法を提議した．ペロン・フロベニウスの定理のような行列の解析的な扱いは，関数解析学にも繋がるので重要であるが，線形代数学の講義では時間の関係で取り上げられないことが多い．この定理の持つ教育効果を少しでも伝えることが出来たならば，本研究ノートの目的は達したことになる．

【参考文献】

1. James P. Keener, The Perron-Frobenius theorem and the ranking of football teams, SIAM Review **35** (1993), 80–93.

2. 齋藤正彦著，線型代数入門．東京大学出版会，1987 年．ISBN: 4-13-062001-0